COMPLEMENTO TEORICO XIV

GEOMETRIA CLASICA

GUIÓN RESUMEN

14.1 CONCEPTOS Y TECNICAS PARA LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS

14.1.1 GEOMETRIA

14.1.1.1 Definición

El objeto de la Geometría es el estudio de las figuras geométricas desde el punto de vista de su forma , extensión y relaciones que guarden entre sí.

14.1.1.2 Tipos de geometrías

La geometría puede ser plana y del espacio.

14.1.2 ANGULOS

14.1.2.1 Teoremas

- Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares.
- Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.
- Las bisectrices de los ángulos opuestos por el vértice están en línea recta.
- Las bisectrices de los 4 ángulos que forman dos rectas al cortarse constituyen dos rectas perpendiculares entre sí.
- Por un punto situado en una recta puede trazarse una perpendicular a dicha recta ay sólo una.
- Por un punto exterior a una recta puede trazarse a dicha recta una perpendicular y sólo una.

Gráficos de estos teoremas

http://roble.pntic.mec.es/~jgad0021

14.1.3 TRIANGULOS

14.1.3.1 Definición de triángulo

Es la porción del plano limitado por tres segmentos rectilíneos que tienen dos a dos un extremo común.

14.1.3.2 Teoremas

- En todo triángulo isósceles, a lados iguales se oponen ángulos iguales.
- En todo triángulo , a ángulos iguales se oponen lados iguales.
- Todo triángulo equilátero es equiángulo , y recíprocamente , todo triángulo equiángulo es equilátero.
- La bisectriz del ángulo desigual en un triángulo isósceles, es a la vez altura , mediana y mediatriz de la base de dicho triángulo.

14.1.3.3 Definición de igualdad de triángulos

Dos triángulos son iguales si tienen iguales sus lados y sus ángulos homólogos.

14.1.3.4 Criterios de igualdad de triángulos

- Dos triángulos son iguales si tienen iguales un lado y los dos ángulos adyacentes son iguales.
- Dos triángulos que tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido son iguales.
- Dos triángulos serán iguales si tienen iguales respectivamente los tres lados.
- Si dos triángulos tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos son iguales.

Gráficamente

http://roble.pntic.mec.es/~jgad002

Ovservamos que los triángulos son igules de acuerdo al primer criterio.Tienen igual el lado AB y los ángulos adyacentes al mismo.

14.1.3.5 Corolarios de la igualdad de triángulos

- Si dos triángulos son iguales , son respectivamente iguales sus seis elementos, y a lados iguales se oponen ángulos iguales , y recíprocamente.

- En la superposición de triángulos iguales los ángulos que coinciden se llaman ángulos homólogos, y también los lados que que coinciden se llaman lados homólogos.

14.1.4 RELACION ENTRE ÁNGULOS Y LADOS

14.1.4.1 Teoremas

- En todo triángulo un ángulo exterior es mayor que cualquiera de los interiores no adyacentes.
- En todo triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo.
- En todo triángulo a mayor ángulo se opone mayor lado.
- Un lado cualquiera de un triángulo es menor que la suma de los otros dos.
- En todo triángulo un lado cualquiera es mayor que la diferencia de los otros dos.

http://roble.pntic.mec.es/~jgad0021

En la figura anterior aparece la prueba del teorema primero.

En la figura anterior aparece la prueba del teorema segundo.

http://roble.pntic.mec.es/~jgad0021

14.1.5 PERPENDICULARES Y OBLICUAS

14.1.5.1 Teoremas

- Si desde un punto exterior a una recta se trazan a ésta un segmento perpendicular y varios oblicuos:
- El segmento perpendicular es menor que cualquier oblicuo.
- Los segmentos oblicuos cuyos pies equidistan del pie del perpendicular son iguales.
- De dos oblicuos cuyos pies distan desigualmente del pie del perpendicular, el mayor es aquel cuyo pie está más.
- Todo punto de la mediatriz de un segmento rectilíneo equidista de los extremos de este segmento.
- Todo punto que equidista de los extremos de un segmento rectilíneo, está en la mediatriz de dicho segmento.
- Los segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas son iguales.
- Si dos ángulos tienen sus lados directa o inversamente paralelos , serán iguales y si tienen dos lados directamente paralelos e inversamente paralelos los otros dos serán suplementarios.
- Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son iguales, si ambos son agudos o obtusos, y son suplementarios si uno es agudo y otro obtuso.
- La suma de los ángulos de un polígono convexo de n lados es igual a

$$c - b = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}} - \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}$$

ángulos llanos.

http://roble.pntic.mec.es/~jgad0021

http://roble.pntic.mec.es/~jgad0021

14.1.6 CUARILÁTEROS

14.1.6.1 Definición de cuadrilátero

Es un polígono de 4 lados.

14.1.6.2 Clases de cuadriláteros

Pueden ser trapecios,trapezoides y paralelogramos.

- Trapezoide

Es el cuadrilátero que no tiene ningún par de lados paralelos

*Cuando una de las diagonales es mediatriz de la otra , el trapezoide se llama simétrico o bisósceles; algunos autores le dan el nombre de trapezoide romboide , ya que su forma recuerda la del rombo.

- Trapecio

http://roble.pntic.mec.es/~jgad0021

Es el cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos.Los dos lados paralelos se llaman bases , y la distancia entre las bases se llama altura.

Si el trapecio tiene dos ángulos rectos , dícese rectángulo, y si los lados no paralelos son iguales, dícese trapecio isósceles o simétrico.En los demás casos el trapecio es escaleno.

- Paralelogramo

Es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos.

Las clases de paralelogramos son:

- Romboide

Es el paralelogramo que tiene los lados adyacentes desiguales y los ángulos oblícuos.No es equilátero ni equiángulo.

- Rectángulo

Es el paralelogramo que tiene los lados adyacentes desiguales y los ángulos rectos.Es equiángulo , pero no equilátero.

- Rombo

Es el paralelogramo que tiene los lados iguales y los ángulos obicuos.Es equilátero pero no eqiángulo.

- Cuadrado

Es el paralelogrmo que tiene los lados iguales y los ángulos rectos.Es equilátero y equiángulo.El cuadrado es el único cuadrilátero regular.

14.1.6.2 Propiedades comunes a todos los cuadriláteros convexos

- Tienen cuatro lados
- Tienen dos diagonales

- En todo cuadrilátero convexo, la suma de los ángulos interiores es 4 rectos.

14.1.6.3 Propiedades comunes a todos los paralelogramos

- Los lados opuestos son iguales
- Los ángulos opuestos son iguales
- Los ángulos adyacentes a un mismo lado son suplementarios
- Una cualquiera de las dos diagonales de un paralelogramo lo divide en dos triángulos iguales no simétricos.
- Las dos diagonales de un paralelogramo se cortan mutuamente en su punto medio.
- El punto O , que divide en partes iguales las diagonales del paralelogramo, divide también en partes iguales a cualquier otro segmento que pasando por él tiene sus extremos en los lados opuestos del paralelogramo.

14.1.6.4 Propiedades particulares de cada paralelogramo

- Las diagonales de un romboide son desiguales y oblicuas
- Las diagonales de un rombo son desiguales ,perpendiculares , y bisectrices de los ángulos.Las diagonales dividen al rombo en 4 triángulos iguales.
- Las diagonales del rectángulo son iguales y oblicuas.
- Las diagonales del cuadrado son iguales, perpendiculares y bisectrices de los ángulos.

14.1.7 LINEAS NOTABLES DE UN TRIANGULO

14.1.7.1 Teoremas

- Si por un par de vértices de un triángulo se trazan paralelas a los lados opuestos se obtiene otro triángulo tal que los puntos medios de sus lados son los vértices del triángulo dado.Los 4 triángulos obtenidos son iguales.
- Las mediatrices se cortan en un punto que equidista de los tres vértices.
- Las tres alturas de un triángulo o sus prolongaciones se conrtan en un punto único.El punto donde se cortan las alturas se llama ortocentro.
- Si por el punto medio de uno de los lados de un triángulo se traza una paralela a otro lado , esta paralela pasará por el punto medio del tercer lado y el segmento determinado en ella por dichos lados será igual a la mitad del lado paralelo con ella.
- Las medianas de un triángulo concurren en un punto que dista de cada vértice , doble que del punto medio del lado opuesto.
- En todo trapecio el segmento que une el punto medio de los lados no paralelos es paralelo a la base e igual a la semisuma de estas.
- En todo trapecio el segmento de base media interceptada por las diagonales es igual a la semidiferencia de las bases.
- En todo triángulo las bisectrices de los ángulos interiores se cortan en un punto interior , al triángulo , y equidistante de los tres lados.El punto de corte de las bisectrices se llama incentro.Es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.
- En todo triángulo las bisectrices de dos ángulos externos y la bisectriz del ángulo interno no adyacente se cortan en un punto exterior al triángulo.Este punto es el centro de la circunferencia exinscrita al triángulo.La circunferencia exiscrita es tangente a un lado y a las prolongaciones de los otros dos lados del triángulo.En el plano de un triángulo existen 4 puntos equidistantes de los tres lados del triángulo.Uno es interior al triángulo y los otros son exteriores al mismo.

14.1.8 CIRCUNFERENCIA

14.1.8.1 Teorema de la tangente

Para que una recta sea tangente a una circunferencia, es necesario y suficiente que sea perpendicular al radio en su extremo.

14.1.8.2 Teoremas del diámetro

- Todo diámetro de una circunferencia es un eje de simetría de la curva.
- Todo diámetro divide a la circunferencia y al círculo en dos partes iguales.
- El diámetro es mayor que cualquier otra cuerda.

14.1.8.3 Relación entre arcos y cuerdas

Definición de ángulo central

Es el ángulo cuyo vértice está en el centro de la circunferencia.

Teoremas:

- En una misma circunferencia o en circunferencias iguales:
- A ángulos centrales iguales corresponden arcos iguales.
- A mayor ángulo central corresponde mayor arco.
- Todo diámetro perpendicular a una cuerda divide a ésta y a los arcos que subtiende en dos partes iguales.
- Dos diámetros perpendiculares entre sí dividen la circunferencia en 4 partes iguales, que se llaman cuadrantes.
- Por tres puntos que no están en línea recta pasa una circunferencia y sólo una.
- En una misma circunferencia o en circunferencias iguales.
- Si dos cuerdas equidistan del centro son iguales.
- Si dos cuerdas no equidistan del centro , la más próxima al centro es la mayor.
- En una misma circunferencia los arcos comprendidos entre paralelas son iguales.
- Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de contacto.

14.1.8.4 Posición relativa de dos circunferencias

Teoremas:

- Si dos circunferencias tienen un punto común fuera de la línea de los centros , tendrán otro común simétrico del anterior, respecto de la línea de los centros.
- Si dos circunferencias son secantes, la distancia de los centros es menor que la suma de los radios , y mayor que su diferencia.
- Si dos circunferencias son secantes , la línea de los centros es mediatriz de la cuerda común.
- Si dos circunferencias son tangentes , la línea de los centros pasa por el punto de contacto.
- Si dos circunferencias son tangentes , la perpendicular trazada a la línea de centros en el punto de contacto, es una tangente común a las dos circunferencias.
- Si dos circunferencias de radios distintos , situadas en un plano son:
- Exteriores:la distancia entre los centros es mayor que la suma de los radios.
- Tangentes exteriores:la distancia entre los centros es igual a la suma de los radios.
- Secantes:la distancia entre los centros es menor que la suma de los radios.
- Tangentes interiores: la distancia entre los centros es igual que la diferencia de los radios.
- Interiores: la distancia entre los centros es menor que la diferencia de los radios.

14.1.8.5 Angulos en la circunferencia

14.1.8.5.1 Tipos de ángulos

Angulo central:son los que tienen el vértice en el centro de la circunferencia.

Excéntricos periféricos:son los que tienen el vértice sobre la circunferencia.

Excéntricos internos:son los que tienen el vértice en un punto interior distinto del centro.

Excéntricos externos:son los que tienen el vértice en un punto exterior al círculo.Los lados pueden ser secantes,uno secante y uno tangente o los dos tangentes a la circunferencia.

Periféricos inscritos:sus lados contienen cada uno una cuerda.

Periféricos semiinscritos:un lado contiene una cuerda y el otro una tangente.

Periféricos exinscritos:un lado contiene una cuerda y el otro la parte exterior de la secante.

14.1.8.5.2 Teoremas de la amplitud de los ángulos en la circunferencia

- La amplitud de un ángulo inscrito es igual a la mitad de la amplitud del arco comprendido entre sus lados.
- La amplitud del ángulo semiinscrito es igual a la mitad de la amplitud del arco interceptado por sus lados.
- La amplitud del ángulo exinscrito es la amplitud de la semisuma de los arcos comprendidos entre los lados del ángulo y entre los lados del opuesto por el vértice.
- La amplitud del ángulo interior a una circunferencia es igual a la semisuma de los arcos interceptados por él y por su opuesto por el vértice.
- La amplitud de un ángulo exterior es igual a la semidiferencia de las amplitudes de los arcos interceptados por el.

14.1.8.5.3 Arco capaz

Se llama arco capaz de un ángulo dado al arco tal que los ángulos inscritos en él sean iguales a ese ángulo dado.

El arco capaz de un ángulo recto es una semicircunferencia.

14.1.9 PROPORCIONALIDAD

14.1.9.1 Teorema de igualdad de segmentos

Tenemos dos rectas en un plano, y en una de ellas tomamos dos segmentos iguales,al trazar , por los extremos de los segmentos , rectas paralelas entre sí , que cortan a la otra recta, determinarán en ella dos segmentos , que también serán iguales entre sí.

14.1.9.2 Teoremas de proporcionalidad de segmentos(Teorema de Thales)

- Si tenemos dos rectas r y s de un plano, y en una de ellas r , tomamos dos segmentos cualesquiera AB ,BC , al trazar por los extremos de estos segmentos rectas paralelas entre sí , que corten a la segunda recta s , determinarán en esta otros dos segmentos , proporcionales a los primeros, o sea que se verifica:
- Si dos rectas de un plano son cortadas por varias parlelas , los segmentos determinados en una de ellas son proporcionales a sus homólogos de la otra , es decir , la razón entre un segmento y su homólogo es constante.

14.1.10 SEMEJANZA DE TRIANGULOS

14.1.10.1 Definición de semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos correspondientes iguales y los lados homólogos proporcionales.

14.1.10.2 Criterios de semejanza de triángulos

- Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, son semejantes
- Si dos triángulos tienen dos lados proporcionales e iguales los ángulos comprendidos , son semejantes.
- Si dos triángulos tienen los tres lados proporcionales son semejantes.

14.1.11 RELACIONES METRICAS

14.1.11.1 Teorema del cateto y de la altura

En todo triángulo rectángulo se verifica que:

- Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre la hipotenusa.
- La altura es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

14.1.11.2 Teorema de Pitágoras

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

14.1.11.3Teorema generalizado de Pitágoras

En todo triángulo el cuadrado del lado opuesto al un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

En todo triángulo el cuadrado del lado opuesto al un ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados más el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

14.1.11.4Teorema generalizado de la altura

Si p es el semiperímetro del triángulo y a,b,c son los lados se verifica:

14.1.11.5Teoremas de la mediana

- La suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera de un triángulo es igual al duplo del cuadrado de la mediana relativa al tercer lado , más el duplo del cuadrado de la mitad del tercer lado.
- La diferencia de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual al duplo del tercer lado por la proyección de la mediana del tercero sobre este lado.

14.1.11.6Teoremas de Euler

La suma de los cuadrados de los cuatro lados de un cuadrado de un cuadrilátero cualquiera , es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales, más el cuádruplo del cuadrado del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

14.1.11.7Corolario del teorema Euler

En todo paralelogramo la suma de los calandrados de los 4 lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales.

En efecto por cortarse las diagonales en sus puntos medios , el segmento que une estos puntos medios es nulo.

14.1.11.8Teorema de la bisectriz del ángulo interior

La bisectriz de ángulo interior divide al lado opuesto en dos segmentos aditivos , directamente proporcionales a los que forman dicho ángulo.

14.1.11.9Teorema de la bisectriz del ángulo exterior

http://roble.pntic.mec.es/~jgad0021

La bisectriz de un ángulo exterior divide al lado opuesto en dos segmentos sustractivos directamente proporcionales a los lados que forman dicho ángulo.

14.1.12 RELACIONES METRICAS ENTRE LINAEAS DE LA CIRCUNFERENCIA

14.1.12.1Teorema de las secantes a la circunferencia

Si por un punto del plano de una circunferencia trazamos secantes a esa circunferencia , el producto de las distancias desde el punto a las intersecciones de la circunferencia con cada secante , es constante , sea cualquiera la secante.

14.1.12.2Teorema de las cuerdas secantes perpendiculares

Si en una circunferencia de radio R , se trazan dos cuerdas secantes perpendiculares cualesquiera , la suma de los cuadrados de los 4 segmentos es igual a

Los segmentos son a,b,c,d .

14.1.12.3Teorema de la tangente y la secante a la circunferencia

Si por un punto del plano de una circunferencia y exterior a ella trazamos una tangente y una secante , el producto de las distancias desde ese punto a las intersecciones de la circunferencia con la secante, es igual al cuadrado de la distancia de ese punto al de contacto de la tangente.

14.1.12.4Otros teoremas

- En todo triángulo ABC inscrito en una circunferencia , el producto de dos lados es igual al producto de la altura relativa al tercero , por el diámetro de la circunferencia circunscrita.
- El producto de dos lados de un triángulo es igual al producto de los segmentos que la bisectriz interior determina sobre el tercero , más el cuadrado de dicha bisectriz.
- El producto (CA,CB) de dos lados de un triángulo es igual al producto (CM,CN) de dos segmentos conjugados isogonales respecto del ángulo BCA,limitados uno de ellos por la base del triángulo y el otro por la circunferencia circunscrita.

*Rectas isogonales:dos rectas CM y CN se dicen conjugadas isogonales respecto al ángulo C o de los lados CA y CB de dicho ángulo , cuando son simétricas respecto de la bisectriz del ángulo C , esto es ,cuando forman con lados CA y CB ángulos iguales.

- El producto de dos lados de un triángulo es igual al producto de los segmentos que la bisectriz exterior determina sobre el tercero ,menos el cuadrado de esa bisectriz.

14.1.12.5Teorema de Tolomeo

En un cuadrado inscrito en una circunferencia , el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.

14.1.12.5Teorema de la potencia

El lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia respecto de una circunferencia dada , es otra circunferencia concéntrica cuyo radio es menor , igual o mayor que R según que la potencia sea negativa , nula o positiva.

*Se llama potencia de un punto respecto a una circunferencia es el producto constante de los segmentos rectilíneos comprendidos entre este punto y los puntos de intersección de una secante cualquiera pasando por P con la circunferencia.

14.1.12.6Teorema de las circunferencias ortogonales

La condición necesaria y suficiente para que dos circunferencias sean ortogonales es que la potencia del centro de una respecto de la otra sea igual al cuadrado del radio.

http://roble.pntic.mec.es/~jgad0021

*Circunferencias ortogonales:dos circunferencias se cortan ortogonalmente cuando las tangentes en uno de los puntos de intersección forman ángulo recto.

14.1.12.7Teorema del eje radical

El eje radical de dos circunferencias es una recta perpendicular a la línea de los centros.

*Eje radical:es el lugar geométrico de los puntos de igual potencia respecto de dos circunferencias.

14.1.12.8Propiedades del eje radical

- La porción exterior del eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos desde donde se puede trazar a las dos circunferencias tangentes iguales.
- El eje radical pasa por el punto medio P de los segmentos de las tangentes comunes a las dos circunferencias limitados por los puntos de contacto.Si las tangentes son exteriores admiten 4 tangentes comunes y los 4 puntos medios de dichas tangentes están en línea recta.
- Todo punto M tomado en el eje radical y exterior a las dos circunferencias , es el centro de una circunferencia ortogonal a las dos dadas.Las tangentes MA y MA´ son radios de esta circunferencia ortogonal.

14.1.12.9Definición de centro radical

Los ejes radicales de tres circunferencias , tomados dos a dos , concurren en un punto , que se llama centro radical.

14.1.13 RAZON SIMPLE

http://roble.pntic.mec.es/~jgad0021

14.1.13.1Definición de razón simple

Se llama razón simple de tres puntos M,A y B que están sobre una recta , y se representa por (MAB) , a la razón entre las distancias MA y MB.

14.1.13.2Razón simple de tres rectas concurrentes

Se llama razón simple de tres rectas concurrentes m,a,b y se representa por (mab),a la razón entre el seno del ángulo agudo que forman las rectas m y a y el seno del ángulo agudo que forman las rectas m y b.

14.1.13.3Teorema de Menelao

Dado un triángulo ABC y una recta r que no sea paralela a ningún lado y que no pase por ningún vértice,que corta al lado AB en M ,al lado AC en N y al lado BC en P se verifica entonces la relación:

14.1.13.4Teorema de Ceva

Si tenemos un triángulo ABC y un punto O que unimos con los vértices entonces las semirrectas OA,OB y OC cortarán a los lados en puntos M,N y P tales que:

http://roble.pntic.mec.es/~jgad0021

14.1.14 OTROS TEOREMAS IMPORTANTES

14.1.14.1 Teorema previo al teorema de Carnot

Se dan dos puntos A y B.El lugar geométrico de los puntos M tales que $AM^2 - MB^2 = k(k \quad)$ es una recta.

14.1.14.2Teorema de Carnot

Para que las perpendiculares bajadas desde los puntos A_1, B_1, C_1 sobre los lados BC,CA y AB del triángulo ABC se intersequen en un punto es necesario y suficiente que:

14.1.14.3Circunferencia de los nueve puntos

http://roble.pntic.mec.es/~jgad0021

Es la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo, los pies de las alturas , los puntos medios de los segmentos de las alturas desde los vértices hasta el punto de intersección.

14.1.14.4Teorema de Feuerbach

La circunferencia de los nueve puntos es es tangente a la circunferencia inscrita en un triángulo y todas las circunferencias exinscritas.

14.2 PROBLEMAS RESUELTOS DE GEOMETRIA CLASICA

Problema 1

Sea G el baricentro del triángulo ABC. Si se verifica:

AB + GC = AC + GB

demostrar que el triángulo es isósceles.

Resolución primera

Teniendo en cuenta el teorema de la mediana, la relación del enunciado se escribe:

$$c - b = \frac{2}{3}\ \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}} - \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}$$

,

multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada queda:

$$c - b = \frac{2}{3}\frac{\frac{3}{4}\left(c^2 - b^2\right)}{m_c + m_b} \qquad (c - b)\ \ m_c + m_b - \frac{c + b}{2}\ \ = 0$$

Probaremos que el segundo factor es positivo, de donde se deduce la conclusión.

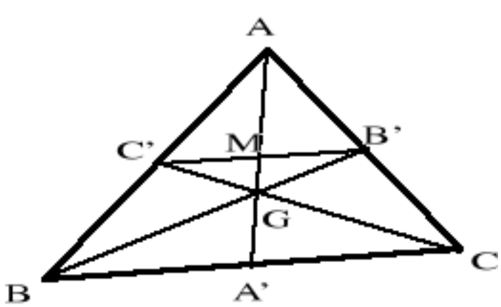
Llamando B' y C' a los puntos medios de AC y Ab respectivamente, en los triángulos CC'A y BB'A tenemos por la desigualdad triangular:

$$m_b + \frac{b}{2} > c; \quad m_c + \frac{c}{2} > b$$

.

Sumando ambas desigualdades se obtiene el resultado.

Resolución segunda



Llamando A', B', C' a los puntos medios de los lados BC, AC y AB respectivamente y dividiendo por dos la condición del enunciado podemos escribirla como:

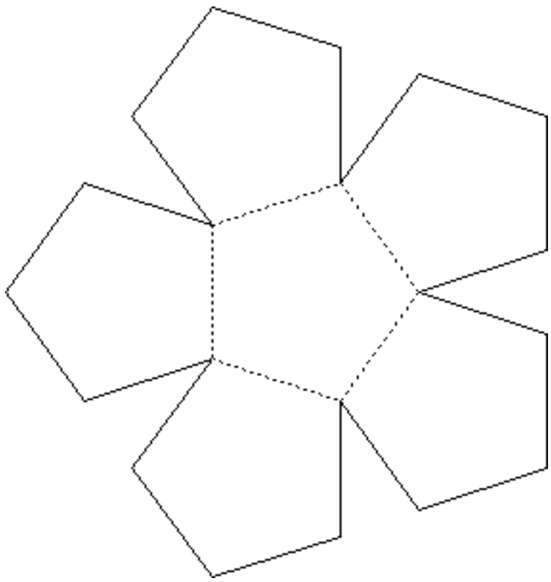
$$\frac{C'A}{2} + \frac{C'G}{2} = \frac{B'A}{2} + \frac{B'G}{2}$$

,

es decir los puntos C' y B' están en una elipse de focos A y G.

Llamando M al punto medio de C'B' , M esta en la mediana AA' y no es el centro de la elipse (punto medio del segmento AG), por tanto C'B' ha de ser perpendicular a AA', y entonces AA' además de mediana es altura y el triángulo es isósceles.

Problema 2



La figura adjunta se compone de seis pentágonos regulares de lado 1m. Se dobla por las líneas de puntos hasta que coincidan las aristas no punteadas que confluyen en cada vértice.

¿Qué volumen de agua cabe en el recipiente formado?.

Observación

Problema de oposición Galicia 2004

Resolución

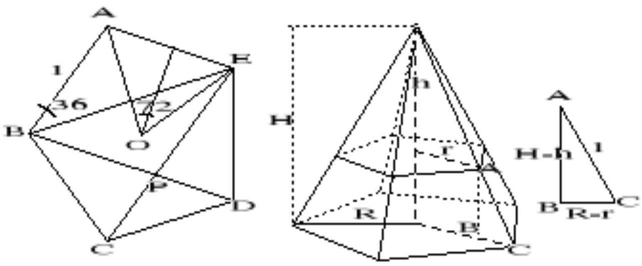
La figura formada por el agua es un tronco de pirámide pentagonal cuya base menor es el pentágono dado y cuya base mayor es otro pentágono regular que tiene por lado la diagonal del anterior paralela a la arista de la base como se muestra en la figura inferior derecha.

Más abajo, se ha dibujado en forma invertida para una mejor comprensión del dibujo. (Figura central).

Establezcamos primero algunas relaciones conocidas para un pentágono regular de lado 1. (Figura de la izquierda).

Llamemos d a la diagonal. Por semejanza de los triángulos ABE y PCD tenemos:

$$\frac{1}{d-1}=\frac{d}{1} \qquad d^2-d-1=0 \qquad d=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi \quad (1)$$



es el llamado número áureo y representa la relación entre la diagonal y el lado de un pentágono regular. En nuestro caso es la relación de semejanza entre las bases del tronco de pirámide.

Además : $\cos 36 = \frac{d}{2} = \frac{\varphi}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

y para el radio r : $\operatorname{sen} 36 = \frac{1}{2r} \qquad r = \frac{1}{2\operatorname{sen} 36} = \frac{1}{\sqrt{4-\varphi^2}} \ (2)$

.

Llamando V al volumen de la pirámide grande , v al de la pequeña, sabemos que V = v ; y para el volumen del tronco de cono Vt queda:

$$V_t = V - v = \varphi^3 v - v = v(\varphi^3 - 1) = \frac{1}{3}ah(\varphi^3 - 1)$$

; siendo a el área del pentágono de lado 1. Sólo nos queda calcular a, h, sustituir y operar:

El área a la calculamos sumado 5 triángulos isósceles de lados iguales r, r formando 72º

$$a = \frac{5}{2}r^2 \operatorname{sen} 72 = \frac{5}{2}r^2\, 2\operatorname{sen} 36 \cos 36 = \frac{5}{2}r\cos 36 = \frac{5}{4}r\varphi$$

. (hemos usado 2rsen36º = 1 de (2)).

Para calcular h, por la semejanza de los triángulos de la figura central, tenemos:

$$\frac{H}{R} = \frac{h}{r} = \frac{H-h}{R-r} \qquad h = \frac{r(H-h)}{R-r} = \frac{r\sqrt{1-(R-r)^2}}{r(\varphi-1)} = \frac{\sqrt{1-r^2(\varphi-1)^2}}{\varphi-1} = \frac{\sqrt{1-\frac{(\varphi-1)^2}{4-\varphi^2}}}{\varphi-1}$$

Como verifica la ecuación (1): = +1; tenemos para la expresión de h:

$$h = \frac{\sqrt{1-\frac{(\varphi-1)^2}{4-\varphi^2}}}{\varphi-1} = \frac{\sqrt{4-\varphi^2-\varphi^2+2\varphi-1}}{(\varphi-1)\sqrt{4-\varphi^2}} = \frac{\sqrt{3-2\varphi-2+2\varphi}}{(\varphi-1)\sqrt{4-\varphi^2}} = \frac{1}{(\varphi-1)\sqrt{4-\varphi^2}}$$

Sustituyendo las expresiones de a y h y poniendo −1= (−1)(+ + 1); queda:

$$V_t = \frac{1}{3}\frac{5}{4}\frac{\varphi}{\sqrt{4-\varphi^2}}\frac{(\varphi^3-1)}{(\varphi-1)\sqrt{4-\varphi^2}} = \frac{5}{12}\frac{\varphi(\varphi^2+\varphi+1)}{4-\varphi^2} = \frac{5}{6}\frac{\varphi(\varphi+1)}{3-\varphi} = \frac{5}{6}\frac{2\varphi+1}{3-\varphi}$$

y sustituyendo el valor de   de (1), queda finalmente:

$$V_t = \frac{5}{3}\frac{2+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{15+7\sqrt{5}}{12} \cong 2{,}554\text{m}^3$$

Ejemplo 3

En el plano, se considera un trapecio no isósceles, cuyas bases son AB y CD.

Sea E el punto de intersección de las rectas en que están los lados AD y BC. Sea F, el punto de intersección de las diagonales. a)Demostrad que la recta EF pasa por los puntos medios de las bases.

b)Demostrad analíticamente que las rectas que unen los puntos medios de los lados del trapecio se cortan en el punto medio del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

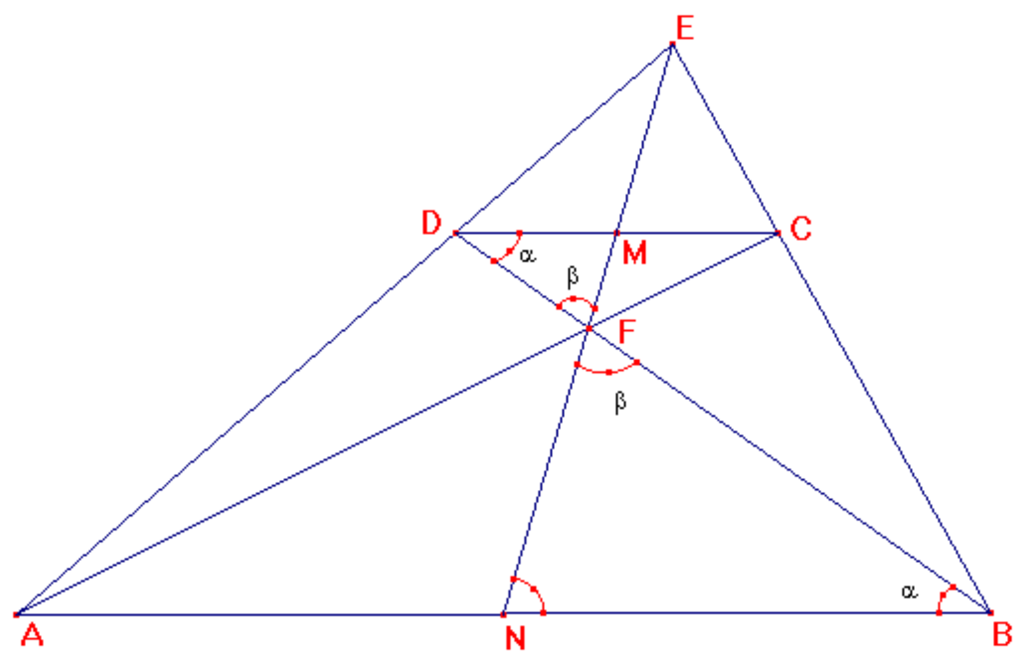
Resolución

Observación

Problema propuesto en las oposiciones Valencia 2004.

<u>*Apartado a:*</u> Solución mediante Geometría Sintética (Geometría Clásica)

Sea el siguiente trapecio no isósceles



Dado que las bases del trapecio son paralelas, podemos aplicar el Teorema de Thales.

$$\frac{\overline{EM}}{\overline{EN}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{NA}}$$

$$\frac{\overline{MD}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{NB}} \qquad \frac{\overline{MD}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$$

(1)

$$\frac{\overline{EM}}{\overline{EN}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{NB}}$$

Por otra parte, utilizando las semejanzas de triángulos se observa que

$$\overset{\Delta}{FMD} : \overset{\Delta}{FNB}$$

pues los tres ángulos son iguales: β

, por ser opuesto por el vértice F y α

, merced al paralelismo de las bases (ángulos alternos internos). Por tanto, el tercer ángulo también será el mismo para ambos triángulos y éstos son semejantes pues tienen los tres ángulos iguales.

$$\overset{\Delta}{FMC} : \overset{\Delta}{FNA}$$

pues también tienen los tres ángulos iguales. La razón es idéntica a la explicada anteriormente.

De ese modo:

$$\frac{\overline{FM}}{\overline{FN}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{NB}}$$

$$\frac{\overline{MD}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{NA}} \qquad \frac{\overline{MD}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NA}}$$

(2)

$$\frac{\overline{FM}}{\overline{FN}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{NA}}$$

Uniendo los resultados obtenidos en **(1)** y **(2)** nos quedará:

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NA}} \qquad \overline{NA}^2 = \overline{NB}^2 \qquad \overline{NA} = \overline{NB}$$

con lo que queda demostrado que N es el punto medio de $\overline{AB}$

.

Por tanto, en **(2)** tendremos:

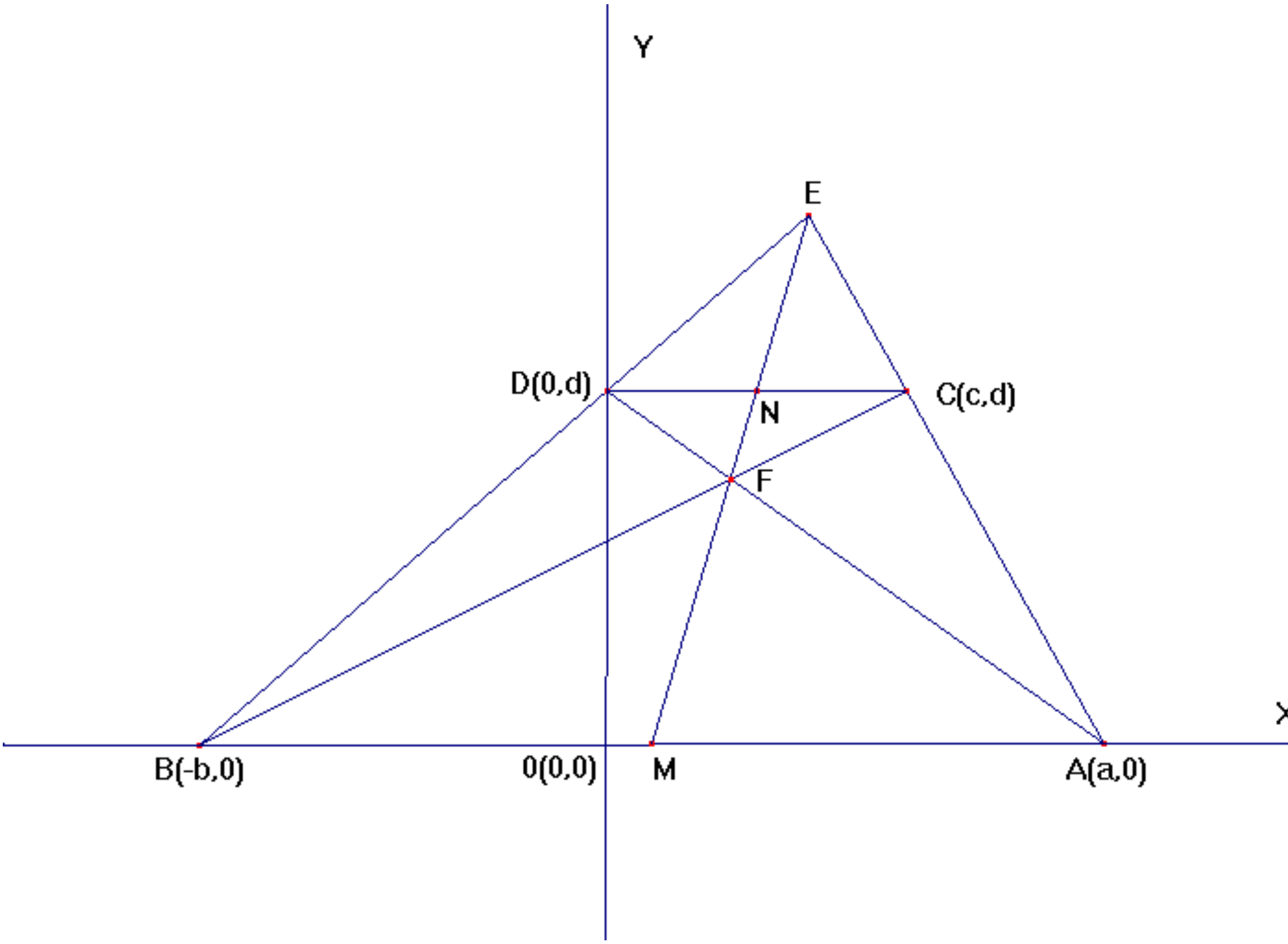
$$\frac{\overline{MD}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NA}} = 1 \qquad \overline{MD} = \overline{MC}$$

y queda demostrado que M es el punto medio de $\overline{CD}$

.

Apartado a: **Solución mediante Geometría Analítica**

Para realizar una demostración analítica del problema, necesitamos buscar un sistema de referencia lo más favorable posible. Es decir, aquél que facilite los cálculos. Sea pues el siguiente sistema de referencia, donde tres de los cuatro puntos que conforman el trapecio no isósceles tienen alguna coordenada nula.



Determinación de la recta *AD*:

$$m_{AD} = -\frac{d}{a} \qquad r_1 \quad y = -\frac{d}{a}\,(x-a)$$

Determinación de la recta *BC*:

$$m_{BC} = \frac{d}{b+c} \qquad r_2 \quad y = \frac{d}{b+c}\,(x+b)$$

http://roble.pntic.mec.es/~jgad0021

El punto de corte de las dos rectas es $F = r_1 \quad r_2$

:

$-\frac{\cancel{d}}{a}\,(x-a)=\frac{\cancel{d}}{b+c}\,(x+b)$

! $(b+c)\;x-a\;(b+c)=-a\;(x+b)$

!

$(a+b+c)\;x-\cancel{ab}-ac=-\cancel{ab}$

! $x=\frac{ac}{a+b+c}$

La ordenada de *F* será:

$$y=-\frac{d}{\cancel{a}}\quad\frac{\cancel{a}c}{a+b+c}-\cancel{a}\quad=-d\;\frac{\cancel{c}-a-b-\cancel{c}}{a+b+c}=\frac{d\;(a+b)}{a+b+c}$$

$$F\quad\frac{ac}{a+b+c},\frac{d\;(a+b)}{a+b+c}$$

Determinación de la recta *BE*:

$$m_{BE}=\frac{d}{b}\qquad r_3\quad y=\frac{d}{b}\;(x+b)$$

Determinación de la recta *AE*:

$$m_{AE}=\frac{d}{c-a}\qquad r_4\quad y=\frac{d}{c-a}\;(x-a)$$

El punto de corte de las dos rectas es $E=r_3\quad r_4$

:

$\frac{\cancel{d}}{b}\,(x+b)=\frac{\cancel{d}}{c-a}\,(x-a)$

! $(c-a)\;(x+b)=b\;(x-a)$

!

$(c-a)\;x+bc-\cancel{ab}=bx-\cancel{ab}$

! $x=\frac{bc}{a+b-c}$

La ordenada de *E* será:

$$y=\frac{d}{\cancel{b}}\quad\frac{\cancel{b}c}{a+b-c}-\cancel{b}\quad=d\;\frac{\cancel{c}+a+b-\cancel{c}}{a+b-c}=\frac{d\;(a+b)}{a+b-c}$$

$$E\ \frac{bc}{a+b-c},\frac{d\ (a+b)}{a+b-c}$$

Por tanto, debemos definir la recta *EF* mimando el álgebra para no equivocarnos.

$$\overrightarrow{EF} = \ \frac{ac}{a+b+c}-\frac{bc}{a+b-c},\frac{d\ (a+b)}{a+b+c}-\frac{d\ (a+b)}{a+b-c}\ =$$

$$= \ c\ \frac{a\ (a+b-c)-b\ (a+b+c)}{(a+b+c)\ (a+b-c)},d\ \ (a+b)\ \frac{\cancel{a}+\cancel{b}-c-\cancel{a}-\cancel{b}}{(a+b+c)\ (a+b-c)}\ =$$

$$=\frac{1}{(a+b+c)\ (a+b-c)}\ \ c\ \left(a^2+\cancel{ab}-ac-\cancel{ab}-b^2-bc\right),-2cd\ \ (a+b)\ =$$

$$=\frac{c}{(a+b+c)\ (a+b-c)}\ \ (a+b)\ (a-b)-c\ \ (a+b),-2d\ \ (a+b)\ =$$

$$=\frac{c\ \ (a+b)}{(a+b+c)\ (a+b-c)}\ (a-b-c,-2d)$$

Un vector proporcional a $\overrightarrow{EF}$
es $\vec{v}=k\ \ \overrightarrow{EF}$
.

Si $k=\dfrac{(a+b+c)\ (a+b-c)}{c\ \ (a+b)}$ $\quad \vec{v}=(a-b-c,-2d)$

Trabajando con la recta *EF* en paramétricas:

$$x=\frac{ac}{a+b+c}+(a-b-c)\ \lambda$$
(1)

s

$$y=\frac{d\ \ (a+b)}{a+b+c}-2d\ \ \lambda$$
(2)

Los puntos medios de *CD* y *AB* son respectivamente:

$$N\ \ \frac{c}{2},d$$

$$M\ \ \frac{a-b}{2},0$$

Si N pertenece a la recta EF , al sustituir sus coordenadas en **(1)** y **(2)** debemos obtener el mismo valor para λ

.

Abcisa de N:

$$\frac{c}{2}=\frac{ac}{a+b+c}+(a-b-c)\ \lambda$$

! $\frac{c}{2}-\frac{ac}{a+b+c}=(a-b-c)\ \lambda$

!

$$\frac{c\ (a+b+c)-2ac}{2\ (a+b+c)}=(a-b-c)\ \lambda$$

! $c\ \frac{b+c-a}{2\ (a+b+c)}=(a-b-c)\ \lambda$

!

$$-c\ \frac{\cancel{(a-b-c)}}{2\ (a+b+c)}=\cancel{(a-b-c)}\ \lambda$$

! $\lambda=-\frac{c}{2\ (a+b+c)}$

(3)

Ordenada de N:

$$\cancel{d}=\frac{\cancel{d}\ (a+b)}{a+b+c}-2\cancel{d}\ \lambda$$

! $1=\frac{a+b}{a+b+c}-2\lambda$

! $\frac{\cancel{a}+\cancel{b}+c-\cancel{a}-\cancel{b}}{a+b+c}=-2\lambda$

$$\lambda=-\frac{c}{2\ (a+b+c)}$$

(4)

Se observa que **(3)** = **(4)**, por lo que N pertenece a la recta EF.

Análogamente que con N, si M pertenece a la recta EF al sustituir sus coordenadas en **(1)** y **(2)** debemos obtener el mismo valor para λ

.

Abcisa de M:

$$\frac{a-b}{2}=\frac{ac}{a+b+c}+(a-b-c)\ \lambda$$

! $\frac{a-b}{2}-\frac{ac}{a+b+c}=(a-b-c)\ \lambda$

!

$$\frac{(a-b)\ (a+b+c)-2ac}{2\ (a+b+c)}=(a-b-c)\ \lambda$$

!

$$\frac{(a-b)\ (a+b)+c\ \ (a-b-2a)}{2\ (a+b+c)}=(a-b-c)\ \lambda$$

!

http://roble.pntic.mec.es/~jgad0021

$$\lambda=\frac{(a-b)\ (a+b)-c\ \ (a+b)}{2\ (a+b+c)\ (a-b-c)}=\frac{(a+b)\ \cancel{(a-b-c)}}{2\ (a+b+c)\ \cancel{(a-b-c)}}=\frac{a+b}{2\ (a+b+c)}$$

(5)

<u>Ordenada de M:</u>

$$0=\frac{\cancel{d}\ (a+b)}{a+b+c}-2\cancel{d}\ \lambda$$

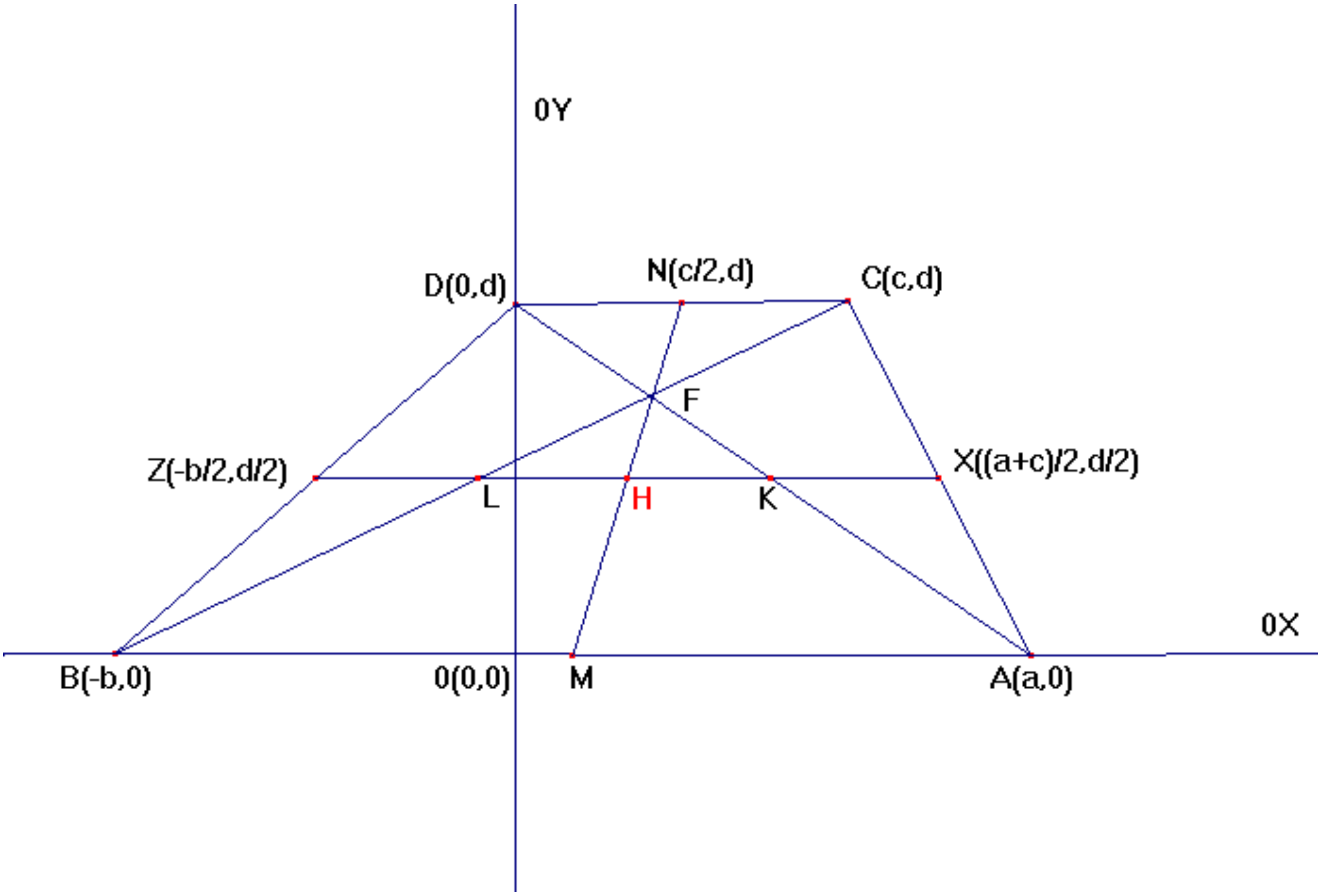
! $\lambda=\frac{a+b}{2\ (a+b+c)}$

(6)

Se observa que **(5)** = **(6)**, por lo que *M* pertenece a la recta *EF*.

Queda demostrado analíticamente el primer apartado del ejercicio: *E*, *N*, *F* y *M* están alineados.

Apartado b)



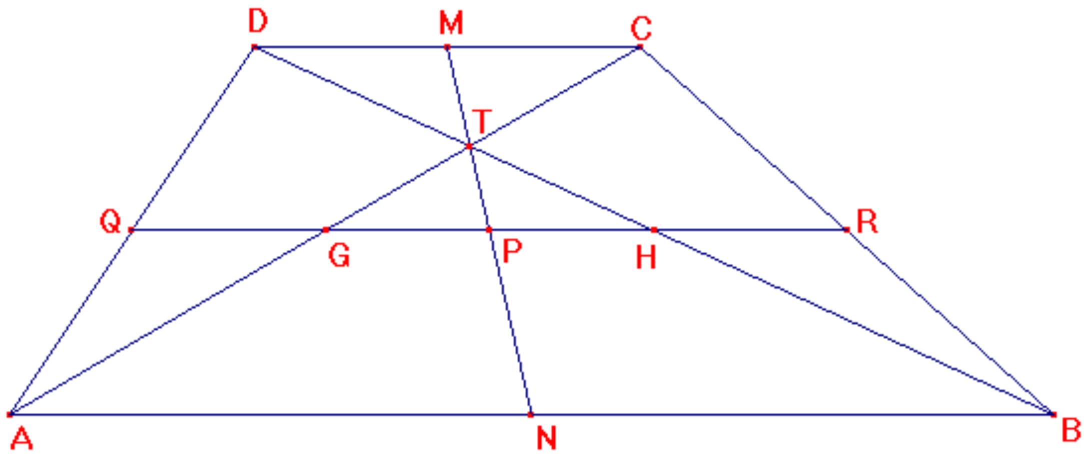
El punto *H* tiene por coordenadas: $H\left(\frac{a-b+c}{4},\frac{d}{2}\right)$

El punto medio de la diagonal *AD* es $K\left(\frac{a}{2},\frac{d}{2}\right)$

El punto medio de la diagonal *BC* es $L\left(\frac{c-b}{2},\frac{d}{2}\right)$

El punto medio de $P_{LK}\left(\frac{a-b+c}{2},\frac{d}{2}\right)$

que evidentemente coincide con *H*.



Dado que *QR* une los puntos medios de *AD* y *BC* y las bases del trapecio son paralelas, *QR* también es paralela y se llama *paralela media*. De ese modo, el punto *P* es el punto medio del segmento *MN* ;es decir, $\overline{MP} = \overline{PN}$
.

No obstante, si consideramos fuerte esta afirmación, podemos aplicar el Teorema de Thales para demostrarla de una forma más convincente:

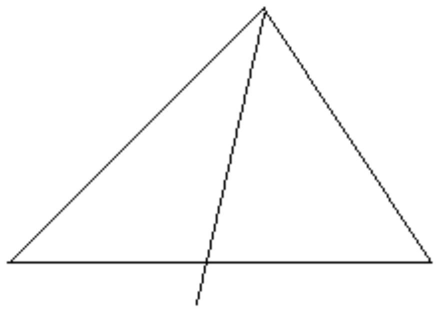
$$1 = \frac{\overline{DQ}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{MP}} \qquad \overline{MP} = \overline{PN}$$

Igualmente se demuestra, por la paralela media o por Thales, que el punto de corte de *AC* y *QR* es el punto medio de la diagonal *AC* , y que el punto *H* de corte entre *QR* y *BD* es el punto medio de la diagonal *BD*.

Por tanto, *P*, *G* y *H* están sobre la paralela media *QR*. Si aplicamos lo demostrado en el apartado anterior, *MN*, *AC* y *BD* se cortan en *T* .

Aplicando el Teorema de Thales: $\frac{\overline{GP}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{NB}}$

Como $\overline{AN} = \overline{NB}$ $\quad \overline{GP} = \overline{PH}$
, verificándose que *P* es el punto medio de *GH*.



A

B

C

D

c

b

bz

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

$$=\frac{c}{b}$$

A

B

C

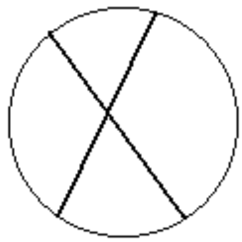
D

bz

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$

c

b



O

A

C

B

D

$OA.OB = OC.OD$

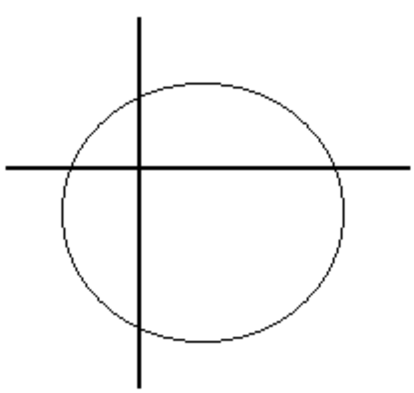
O

B

C

A

D



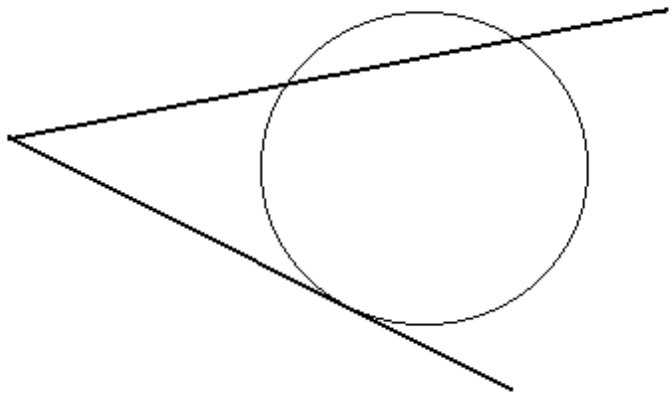
a

b

c

d

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2$



O

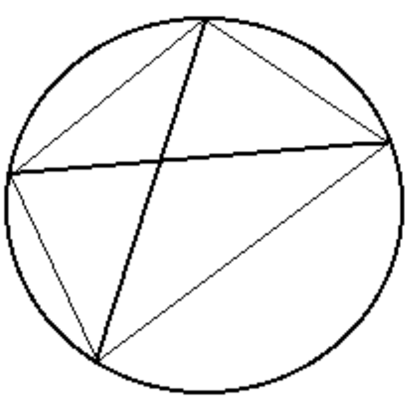
C

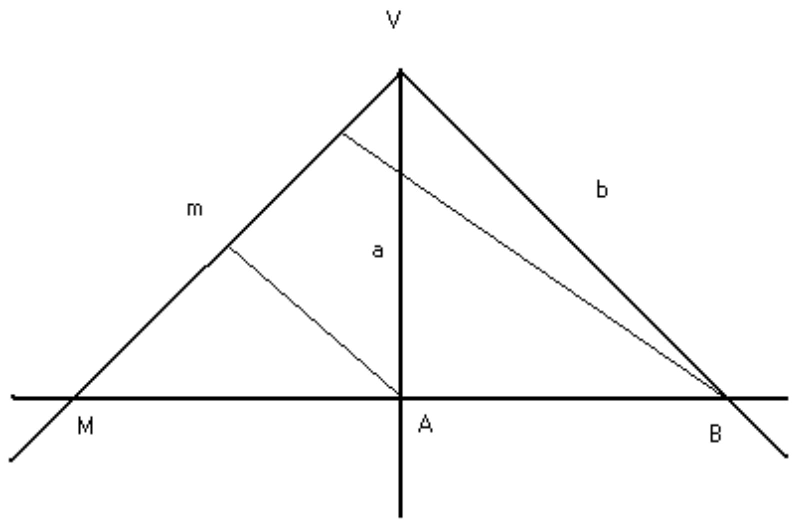
B

A

C

$OC^2 = OA.OB$





D

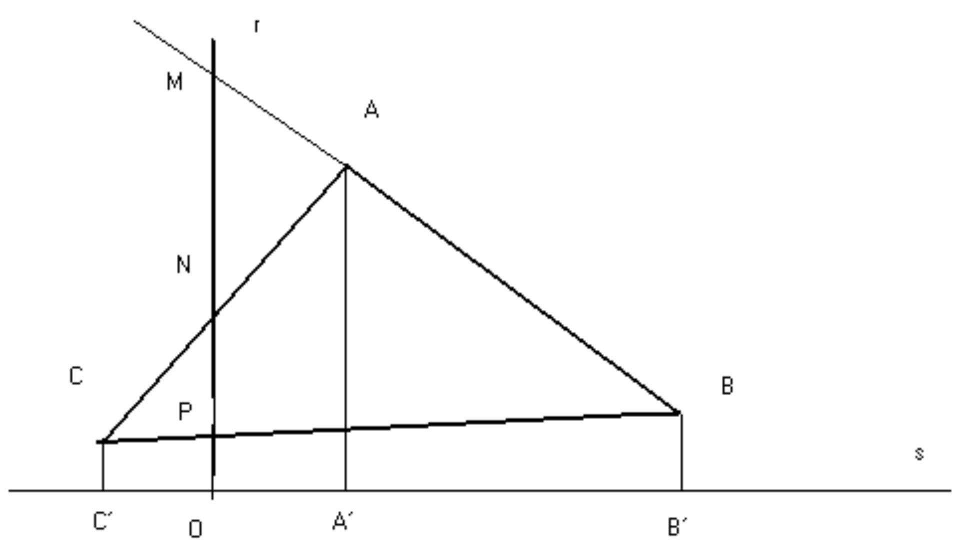
A

C

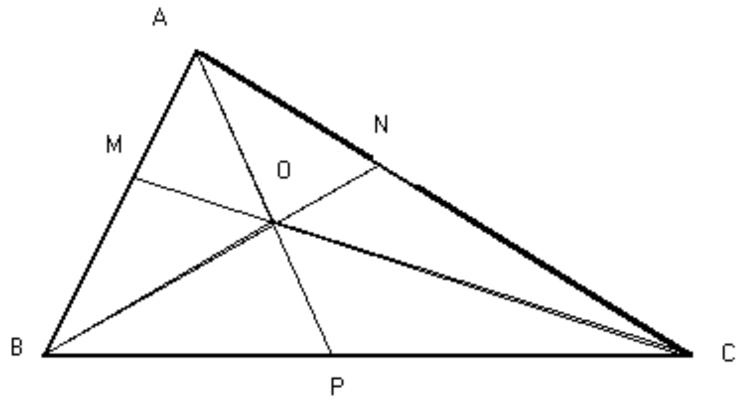
AB.DC+DA.CB=AC.BD

B

$$\frac{MA}{MB}.\frac{PB}{PC}.\frac{NC}{NA}=1$$



$$\frac{MA}{MB}.\frac{PB}{PC}.\frac{NC}{NA}=-1$$



$$A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0$$

a+b=180º;a/2+b/2=90º

a

b

BIBLIOGRAFIA

¿Cómo resolver problemas de Matemáticas?

1ºbachillerato−2ªEdicción−Ed Celarayn(León)−J.M.García

¿Cómo resolver problemas de Matemáticas?

2ºbachillerato− −Ed Celarayn(León)−J.M.García

Estos textos son una herramienta útil para:

1−Manejar y clarificar los principales conceptos.

2−Adquirir las técnicas y estrategias para la resolución de los problemas.

3−Ver las distintas posibilidades de aplicación de los conceptos teóricos.